

## 副実像の研究VI 「“副焦点” の発見」

熊本県立宇土高等学校 科学部物理班

### 1 研究の目的

我々は、広角にある物体でも副実像は出現するという性質に大変興味を持ち、心靈写真と副実像の関係を明らかにし、教科書に掲載されている写像公式のように、全ての副実像の位置を理論的に求められないか調べた。公式化することでレンズの写像公式との違いを明らかにできると考え、新たに、行列を用いた光線追跡という手法を採用し、副実像の出現位置の数式化に挑戦する。また、「ヒトの眼にも副実像は出現するか」という質問からヒトの眼や昆虫の単眼に着目し、レンズの形状等から副実像の出現の有無を探ることを目的とする。昨年我々の研究の成果として、①凸レンズの副実像について写像公式を導出できた②オオスズメバチの単眼（凸レンズ）に副実像（前方）が出現していることを初めて捉えた③平凸レンズを用いた焦点距離と副実像の出現位置の関係性を得ることができた。そこで今回は、平凸レンズの厚肉における検証を通して副実像全ての出現位置の数式化の完成を目指した。また、昆虫の単眼はなぜ極端な遠視の状態のままであるのか、物理的視点からその謎に迫ることにした。

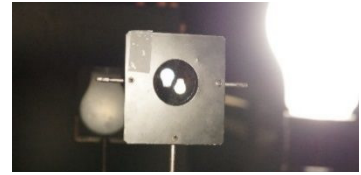


図1 倒立の副実像と実像  
 レンズ奥のスクリーンに映っているのが本来の実像で、レンズ付近の倒立像が前方の副実像。正立像は虚像で、後方の副実像はスクリーン側から観察しないと見えない。これまでの研究で、副実像は平凸レンズにも出現し、レンズ内で1回反射して前方の副実像を、2回反射で後方の副実像をつくりだすことがわかっている。

### 2 方法

(1) 行列計算できるエクセルを用いれば、副実像の出現位置の値そのものは求められる。しかし、公式自体は手計算で導出せざるを得ない。そこで、凸レンズと同様に、行列を用いた光線追跡を手計算で何度も行い、平凸レンズの副実像の出現位置を導出する。その際、昨年考案したオリジナルの検証方法（ $\alpha$ パターン、 $\beta$ パターン）で検証も行う。

※ $\alpha$ パターン：屈折率  $n$  の媒質中を入射・転送・反射・出射にあわせて行列を組み、計算して数式化させる方法

※ $\beta$ パターン：屈折率 1 の媒質中を転送・反射にあわせて行列を組み、最後にまとめて屈折率  $n$  で入射・出射させて数式化させる方法

(2) オオスズメバチやトノサマバツタ以外にも、アブラゼミの単眼なども捕獲して単眼の形状などを調べる。網膜の位置決定には、視細胞を染色液で染色して計測する。

### 3 結果

専門書にある厚肉レンズにおける写像公式を手がかりに、膨大な行列の手計算とオリジナルの検証方法によって、平凸レンズ（厚肉）の副実像の出現位置を求める数式が完成した。その結果、平凸レンズがつくる副実像においても数式化に成功した。これにより、2年かけて、ようやく、凸レンズ・平凸レンズともに難度の高かった厚肉モデルでの副実像の出現位置を求める数式が完成し、全ての副実像の写像公式化に成功することができた。また、曲率半径の異なるレンズにおける副実像の出現位置を求める数式も導出できたことから、アブラゼミの単眼との関係性についても検証できる可能性が高まった。

$$\begin{aligned}
 & \text{◆平凸(平凸向き) 後方(P)◆} \\
 & \begin{array}{cccccc}
 \text{平面出射} & \text{転送} & \text{転送} & \text{平面反射} & \text{転送} & \text{平面入射} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R} & m \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \\
 \end{array} \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{n-1}{R} & -\frac{d(n-1)}{R} + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & 2d \\ -\frac{n-1}{R} & -\frac{2d(n-1)}{R} + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix} \dots \\
 & = \begin{pmatrix} -\frac{2d}{R} + 1 & 2d \\ -\frac{2d(n-1)}{R} + \frac{2d}{R} + m & -\frac{2d}{R} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \\
 & = \begin{pmatrix} -\frac{2d}{R} + 1 & 2d \\ -\frac{2d(n-1)}{R} + \frac{2d(n-3)}{R} + \frac{2d}{R} + m & -\frac{2d}{R} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} -\frac{2d}{R} + 1 & 2d \\ -\frac{2d(n-1)}{R} + \frac{2d}{R} + \frac{2d}{n} - \frac{2d}{nR} + 1 \end{pmatrix} \\
 & \quad d=0, n=1.5, R=\frac{f}{2} \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

図2 光線追跡の手法を用いた行列計算式の一例（平凸レンズ凸面後方）

## 4 考察

昨年導出した凸レンズの写像公式が以下の2つである。

前方： $1/a+1/b=4/f$  後方： $1/a+1/b=7/f$  (厚み  $s=0$ , 屈折率  $n=1.5$ , 曲率半径  $R=f$  のとき)

これに、平凸レンズに出現する副実像の写像公式4つが新たに加わり、凸レンズ、平凸レンズに出現する副実像全ての写像公式が完成した。

厚み  $s=0$ , 屈折率  $n=1.5$ , 曲率半径  $R=f/2$  のとき、

<凸平向き>凸面前方： $1/a+1/b=2/f$  平面後方： $1/a+1/b=7/f$

<平凸向き>平面前方： $1/a+1/b=6/f$  凸面後方： $1/a+1/b=7/f$  ( $s=0, n=1.5$ , 曲率半径  $R=f/2$  のとき)

これにより、副実像の出現位置(近似値)を理論的に簡単に求められるようになった。また、写像公式を作成できたことにより、副実像にも“副焦点”があることを発見した。平凸レンズの凸面前方を例に考える。写像公式の  $a$  を  $a=\infty$  とすると、 $b=f/2$  となり、レンズから  $f/2$  離れた位置が凸面前方の副実像の焦点、いわゆる“副焦点”の存在を示唆でき、実際に副実像の虚像も確認できた。さらに、厚肉モデルに単眼の条件を当てはめると、副実像は網膜付近に出現していることがわかった。

### (1) 副実像と昆虫の単眼について

副実像スコープを製作してみてもわかったことをいくつか挙げてみる。まず、光源が光軸から外れたときほど威力を発揮するのが副実像である。

強い光源が光軸に近ければ副実像は認識しにくい、光軸から大きく外れるほど認識しやすいことがわかった。また、今回の研究を通して、単眼はレンズ眼としての性質を持っていることが確認できたことから、単眼のもう一つの役割が見えてきた。一見、レンズ眼は動く物体でも像として認識できそうだが、物体がレンズから離れれば結像の位置も移動する。そのため、単眼にとって網膜はベストの位置にないことがわかる。つまり、単眼は網膜の位置に集光しきれずに、常にピンボケ状態であり、周囲の明暗を認識する程度の能力しかないと言われることには物理的にも合点がいく。また、逆の視点も見えてくる。それは、集光するからこそ「方向」がわかるともいえる。もし、出現位置がほとんど変化しない副実像を網膜上で捉えている(大昔、捉えていた)とすれば、複眼がなくても「広い視野」と「方向」も認識できると考えることもできる。

### (2) 副焦点について

数式、実験から副焦点が存在することを確認した。2つの実験から副実像に対応する虚像が確認できたため、副焦点は確かに存在するといえる。また、顕微鏡を使った実験から、我々の身近な副実像に対応する虚像を発見した。それは、顕微鏡を覗き込むときに映る大きなまつ毛である。生物実験の際、邪魔になるあの現象に実は副実像が関わっていることを明らかにした。

## 5 感想

先輩から引き継いで行ってきた研究であったが、レンズの反射を抑える防止膜技術が上がり副実像は捉えにくくなったが、安価なガラスレンズや昆虫の単眼に副実像が確認できる点はとても興味深い。写像公式の完成が、副実像自体が一度も実証されていない実像の証明につながり、教科書等での実像に関する表記の見直しの必要性を強く示唆できた。物理分野から数学、生物と幅広い分野の知識が必要で困難を要したが、光学の分野に副実像や副焦点という新たな概念を登場させ、副実像の研究が一段落でき、世界ではじめて副実像の写像公式を作成することができた。また、昆虫の単眼は副実像を認識できる可能性が高まった点はとても興味深い。

## 6 謝辞

ご指導を頂いている科学部顧問の梶尾滝宏先生、装置等でお世話になっている生物科の先生方に感謝致します。また、本研究を進めるにあたり昆虫の眼の専門的な知見や単眼の切り出し方などのアドバイスをくださった、熊本大学大学院生命科学研究部分子脳科学分野の岩本和也先生、文東美紀先生、国立大学法人総合研究大学院大学の木下充代先生に感謝申し上げます。

### <参考文献>

- [1] 節足動物の眼の機能形態学 田中源吾 群馬県立自然史博物館研究報告(17):25-48, 201
- [2] ヘクト光学 I 基礎と幾何光学 Eugene Hecht 著 尾崎義治・朝倉俊充訳